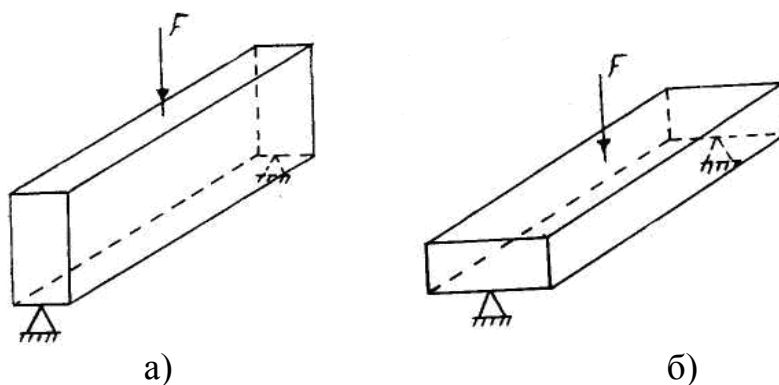


## ЛЕКЦИЯ 2

### ЖАЗЫҚ КӨЛДЕНЕҢ ҚИМАЛАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Материалдар кедергісі ғылымында зерттелетін негізгі объект брус-стержень.

Брустардың деформацияға қарсыласу қабілеттері, олардың материалдары мен өлшемдеріне ғана емес, сонымен қатар көлденең қималарының аудандары мен пішіндеріне де байланысты. Мысалы, созылу және сығылу кездерін қарастырсақ, дененің кедергісі оның көлденең қимасының ауданына тура пропорционал болады және көлденең қимасының ауданы үлкен болған сайын дененің ұзаруы мен кернеудің шамасы кемитін болады. Бұл жағдайда дененің көлденең қимасының геометриялық сипаттамасы сол қиманың ауданы болып табылады. Енді денеге бұрау және иілу күштері немесе моменттері әсер еткенде, жоғарыдағы сипаттаманы қолдануға болмайтынына оңай көз жеткізуге болады.



1.1-сурет

Мысалы, қима ауданы бірдей, бірақ аудан пішіндері әр түрлі денелерге бұрау және иілу моменттерінің әсері қандай болатынын байқайық. Егер қима ауданы бірдей арқалыққа иілу моменттері әсер ететін болса, сол аудандардың орналасу жағдайына байланысты майысу шамасы әр түрлі болады (1.1-сурет). Екінші көрсетілген жағдайда (1.1, б-сурет) майысу шамасы (деформациясы) анағұрлым кем болатыны айқын.

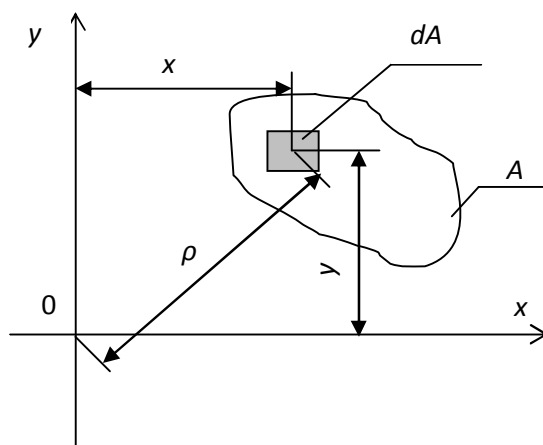
Осыған орай, иілу және бұралу кезінде пайда болатын деформацияның шамасы қима ауданының иілу және бұрау моменттеріне сәйкес орналасуына байланысты болады. Деформациялану түрлеріне қарай, брустардың сыртқы күшке қарсыласу қабілеттері, қималарының әр түрлі геометриялық сипаттамаларына байланысты.

Былайша айтқанда, моменттер әсерін қима ауданы арқылы өтетін  $x$ ,  $y$  өстеріне байланысты қарастыру қажет.

Күш моменттерінің әсерінен пайда болатын деформация дененің қимасы тек қана қима ауданына емес, сонымен қатар оның пішіні мен өстен қалай және қандай қашықтықта орналасатынына да байланысты.

Кез-келген қима ауданының өске байланысты орналасуын сипаттайтын

шаманы **статикалық момент** немесе бірінші дәрежелі момент деп атайды. Статикалық моментті келесі түрде жазуға болады (1.2-сурет):



1.2-сурет

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_A y dA, \\ S_y &= \int_A x dA. \end{aligned} \right\}$$

Қима ауданының ауырлық центрінің координаттары белгілі болса, онда статикалық момент былай анықталады:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= Ay_c, \\ S_y &= Ax_c. \end{aligned} \right\}$$

Қиманың белгілі бір өске байланысты алынған статикалық моменті деп, қима ауданының сол өске дейінгі қашықтыққа көбейтіндісін айтады.

Статикалық моменттер  $x_c$ ,  $y_c$  координаттарының таңбаларына байланысты оң, теріс және жеке жағдайларда нөлге тең болуы мүмкін, өлшем бірлігі:  $[\text{ұзындығы}]^3$ ,  $\text{м}^3$ ,  $\text{см}^3$ ,  $\text{мм}^3$ .

Ауырлық центрі арқылы өтетін өстерді **центрлік өстер** деп атайды. Қиманың центрлік өске карағандағы статикалық моменті нөлге тең ( $x_c=0$ ,  $y_c=0$ , онда  $S_x=0$ ,  $S_y=0$ .) Егер қима күрделі болса, онда белгілі бір өске карағандағы статикалық моментін табу үшін оны қарапайым қималарға жіктеген ыңғайлы. Сонда қиманың статикалық моменті оның қарапайым бөліктерінің статикалық моменттерінің қосындысына тең.

Күрделі қиманың  $x$  және  $y$  өстеріне қатысты ауырлық центрінің координаттары келесі түрде анықталады

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \sum_1^n A_i x_i, \\ y_c &= \frac{S_x}{A} = \frac{1}{A} \sum_1^n A_i y_i. \end{aligned} \right\}$$

мұндағы  $A$ ,  $A_i$  – қиманың және бөліктерінің аудандары.

### Қималардың инерция моменттері

Статикалық моменттің шамасын есептегенде брус қимасының пішінін есепке алмауға болады, бірақ бұралу, иілу кезіндегі кернеу мен деформацияны статикалық момент арқылы табуға болмайды. Ол үшін қима ауданының инерция моментін білу қажет. Инерция моментін былай анықтаймыз:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_A y^2 dA, \\ J_y &= \int_A x^2 dA. \end{aligned} \right\}$$

Қиманың белгілі бір өске байланысты алынған инерция моменті деп, қима ауданының сол өске дейінгі қашықтықтың квадратына көбейтіндісін айтады (1.2-сурет).

$J_x$  және  $J_y$  параметрлері  $x$  және  $y$  өстеріне байланысты табылған, сондықтан оларды **өстік инерция моменті** деп атайды.

Егер өстер қиманың ауырлық центрі арқылы өтсе, онда оларды қима инерциясының центрлік өстері деп, ал инерция моменттерін сол центрлік өстердегі инерция моменті деп атайды. Осы инерция моменттерінің қосындысын полярлық момент деп атайды (1.2-сурет)

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

**Полярлық инерция моментін** бір-біріне перпендикуляр қиылысқан екі өстің полюсіне байланысты табуға болады

$$J_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Сонда

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x,$$

$$J_p = J_y + J_x.$$

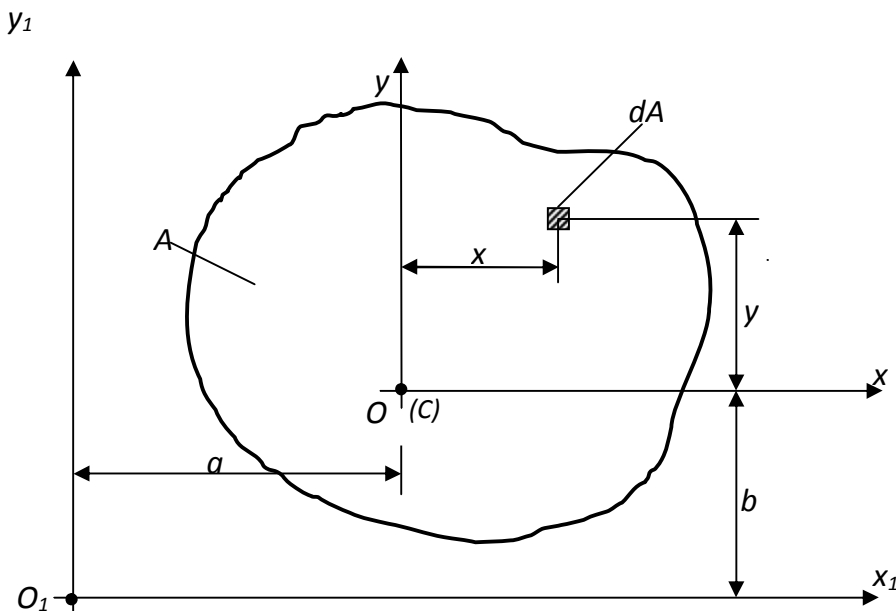
Өзара перпендикуляр өстердегі инерция моментін **центрден тепкіш** момент деп атап және оны төмендегі формула бойынша анықтауға болады:

$$J_{yx} = \int_A y \cdot x \cdot dA.$$

Центрден тепкіш инерция моментінің шамалары оң, теріс және жеке жағдайларда нөлге тең болады. Инерция моменттерінің өлшем бірлігі:  $[\text{ұзындығы}]^4$ ,  $\text{м}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{мм}^4$ .

### Параллель өстерге қарағандағы инерция моменттері

Белгілі бір жазықтықта әр түрлі орналасқан өстердегі инерция моменттерін табу іс жүзінде жиі кездесіп отырады. Бұл үшін қимадағы шамасы белгілі инерция моменті арқылы басқа өстердегі инерция моментін табуға болады. Сондықтан да, белгілі бір қиманың әр түрлі өстердегі инерция моменттерінің өзара қатынасын білудің маңызы зор. Мысалы, қиманың өзара перпендикуляр  $x$ ,  $y$  центрлік өстерге байланысты  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  инерция моменттері белгілі делік (1.3-сурет). Енді осы өстерге параллель жаңа  $x_1$ ,  $y_1$  өстеріне қарағандағы инерция моменттерінің шамаларын анықтайық. Бөлініп алынған  $dA$ –нің  $xOy$  жүйесіндегі координаталары  $x, y$ , ал  $x_1O_1y_1$  жүйесіндегі координаталары  $x_1=x+a$ ,  $y_1=y+b$  болсын.



1.3-сурет

Қиманың жаңа өске қарағандағы инерция моменттері төмендегі интегралдармен анықталады

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = J_x + b^2 A, \\ J_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA = J_y + a^2 A, \\ J_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = J_{xy} + abA, \end{aligned} \right\}$$

Сонымен, қиманың кез келген центрлік өсіне параллель өске қатысты өстік инерция моменті центрлік өстік инерция моментіне қиманың ауданын осы өстердің ара қашықтығының квадратына көбейтіп, қосқанға тең.

Қиманың өзара перпендикуляр центрлік өстеріне параллель өстерге қарағандағы центрден тепкіш инерция моменті, центрлік өстерге қатысты центрден тепкіш инерция моментіне қиманың ауданын осы өстердің ара қашықтықтарына көбейтіп, қосқанға тең.

Жалпы жағдайда, күрделі қиманың инерция моменттері келесі формулалармен анықталады

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum (J_{xi} + b_i^2 A_i), \\ J_y &= \sum (J_{yi} + a_i^2 A_i), \\ J_z &= \sum (J_{x_i y_i} + a_i b_i A_i). \end{aligned} \right\}$$

### Бас өстері және бас инерция моменттері

Өстер, оларға сәйкес центрден тепкіш инерция моменті нөлге тең болса **қиманың бас өстері** деп аталады.

Бас өстерге қатысты өстік инерция моменттері **бас инерция моменттері** деп аталады.

Бас инерция моменттері экстремаль мәнге ие болады: бір өске қатысты инерция моменті – минимал, (ең аз мәнде), ал екінші өске қатысты максимал (ең үлкен мәнде) болады. Беріктікке, қатаңдыққа және орнықтылыққа есептеу кезінде бас центрлік өстердің орнын және оларға сәйкес бас центрлік инерция моменттерін білу қажет.

Егер қимада бір симметриялық өс болса, онда бұл өс және оған перпендикуляр, қиманың ауырлық центрінен өтетін өс **бас центрлік өс** деп аталады.

Бас өстердің бұрылу бұрышы келесі арақатынаспен анықталады:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Алынған формула бұрыш  $\alpha$  үшін екі мағына береді:  $\alpha'_o$  және  $\alpha''_o = \alpha'_o + 90^\circ$ , олай болса, инерция моменттері экстремаль мәнге ие болатындай екі қарама-қарсы перпендикуляр өстер пайда болады. Мұндай өстерді инерцияның **бас өстері**, ал осы өстерге сәйкес инерция моменттерін **бас инерция моменттері** деп атайды. Белгіленеді  $J_{max}$ ,  $J_{min}$  және  $J_{max} \geq J_{min}$  болу керек.

Бас инерция моменттері келесі арақатынаспен анықталады:

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Жоғарғы таңба максимал, ал төменгісі минимал инерция моменттеріне сәйкес келеді.

### **Қималардың кедергі моменттері мен инерция радиусы**

Қиманың кедергі моменттері арқалықтың, брустың иілуге және бұралуға қарсыласуын сипаттайды:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}, \quad W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}$$

мұндағы  $y_{\max}$ ,  $x_{\max}$ ,  $\rho_{\max}$  - қиманың шеткі нүктесіне дейін қашықтық.

Кедергі моменттерінің өлшем бірлігі [ұзындығы]<sup>3</sup> немесе  $m^3$ ,  $cm^3$ ,  $mm^3$ . Ол көлденең қиманың түрі мен өлшеміне байланысты.

Өстік инерция момент пен қима ауданының арасындағы байланыс арқылы табылатын шаманы **қиманың инерция радиусы** деп атайды. Анықталады келесі формуламен

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Жарты өстері бас инерция радиустарына тең, бас өстерге тұрғызылған эллипс – инерция эллипсі деп аталып, мына теңдеумен өрнектеледі

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1.$$

Инерция эллипсінен кез келген центрлік өске карағандағы инерция моментін табуға болады.